

Plastostatika pravokutne ploče zglobno oslonjene duž triju stranica

Riko Rosman

Ključne riječi

plastostatika,
kinematička metoda,
ploče,
opterećenje,
savojna čvrstoća ploče,
granično stanje nosivosti

R. Rosman

Stručni rad

Plastostatika pravokutne ploče zglobno oslonjene duž triju stranica

Kinematičkom metodom plastostatike analizira se pravokutna ploča zglobno oslonjena duž triju stranica i slobodna duž četvrte. Ploča je opterećena jednoliko podijeljenim opterećenjem na cijeloj površini, koncentriranoj sili na proizvoljnom mjestu ili kombinacijom jednoliko podijeljenog opterećenja i proizvoljnog broja koncentriranih sila. Izvedeni su jednostavni obrasci koji su prikladni za primjenu. Dva brojčana primjera pokazuju praktičnu primjenu ovog razrađenog postupka.

Key words

plastic static analysis,
kinematic method,
slabs, load,
bending strength
of the slab,
ultimate bearing capacity

R. Rosman

Professional paper

Plastic static analysis of rectangular slab supported along three sides

The rectangular slab hinged along three sides and freely supported along the forth one is analyzed by kinematic method of plastic static analysis. The slab is subjected to load applied uniformly along the entire surface, to load concentrated in an arbitrary spot, and to a combination of uniformly distributed load and an arbitrary number of concentrated forces. Simple patterns, suitable for practical use, are derived. Two numerical examples show in which way can this procedure be used in practice.

Mots clés

plastostatique,
méthode cinématique,
dalles, charge,
résistance à la flexion
d'une dalle,
état limite de la capacité
portante

R. Rosman

Ouvrage professionnel

Plastostatique d'une dalle rectangulaire appuyée sur trois côtés

La méthode cinématique de la plastostatique a été utilisée pour analyser une dalle rectangulaire appuyée par l'articulation sur trois côtés et libre sur le quatrième côté. La dalle est sollicitée uniformément sur toute la surface, par une force concentrée à un endroit arbitraire ou par une combinaison de charges réparties uniformément et d'un nombre arbitraire de forces concentrées. Des modèles simples en ont été déduits, adaptés à la mise en œuvre. Deux exemples numériques illustrent l'utilisation pratique de cette méthode.

Ключевые слова

пластостатика,
кинематический метод,
плита,
нагрузка,
прочность при изгибе,
предельная несущая
способность

P. Росман

Отраслевая работа

Пластостатика прямоугольной плиты опирающейся вдоль трех сторон

Кинематическим методом пластостатики производится анализ прямоугольной плиты шарнирно опирающейся на три стороны и со свободной четвертой стороной. Плита нагружена равномерно распределенными нагрузками по всей поверхности, сконцентрированной силой на произвольном месте или комбинацией равномерно распределенных нагрузок и произвольного количества сконцентрированных сил. Выполнены несложные образцы, пригодные к применению. Два численных примеров показывают практическое применение данного метода.

Schlüsselworte:

Plastostatik,
kinematische Methode,
Platten, Belastung,
Biegezugfestigkeit der
Platte
Grenzzustand
der Festigkeit

R. Rosman

Fachbericht

Plastostatik der rechteckigen dreiseitig gelagerten Platte

Mittels der kinematischen Methode der Plastostatik analysiert man die rechteckige Platte die längs dreier Seiten gelenkig gelagert und längs der vierten Seite frei ist. Die Platte ist über der ganzen Fläche gleichförmig und mit einer konzentrierten Kraft an beliebiger Stelle, oder durch Kombination von gleichförmiger Belastung und beliebiger Zahl von konzentrierten Kräften belastet. Erarbeitet sind einfache Formeln die für die Anwendung geeignet sind. Zwei Zahlenbeispiele zeigen die praktische Anwendung dieses Verfahrens.

Autor: Akademik, dr. sc. **Riko Rosman**, dipl. ing. građ., redoviti sveučilišni profesor u mirovini, Šenoina 8, Zagreb

1 Uvod

Prednosti su plastostatike ploča u usporedbi s elastostatikom što daje uvid u mehaničko ponašanje i nosivost ploče u njezinu graničnom stanju i da su obrasci za potrebnu savojnu čvrstoću ili plastični moment ploče uobičajenih sustava najčešće vrlo jednostavni. Prema EC 2 plastostatička rješenja mogu se rabiti i u konačnim statičkim proračunima [1].

U [2-7] navedena su plastostatička rješenja za mnoge ploče koje se rabe u graditeljstvu. Ovdje se, polazeći od [2], daje još i rješenje za pravokutnu ploču bilateralno zglobno oslonjenu duž triju stranica i slobodnu duž četvrte. Tretiraju se utjecaji jednoliko podijeljenog opterećenja na cijeloj ploči, koncentrirane sile na proizvoljnom mjestu te kombinacije jednoliko podijeljenog opterećenja i proizvoljnog broja koncentriranih sila.

U izvođenju se primjenjuje opća kinematička metoda detaljno opisana u [7].

Pretpostavlja se da je ploča izotropna, dakle u slučaju armiranog betona izotropno armirana.

2 Utjecaj jednoliko podijeljenog opterećenja

Već prema omjeru stranica ploče moguća su dva sustava linija tečenja i time dva lomna mehanizma.

Na slikama 1.a i b prikazane su u tlocrtu i presjecima, dvije pravokutne ploče koje se analiziraju te odgovarajući sustavi linija tečenja ili plastičnih zglobova koji nastaju od jednolikog podijeljenog opterećenja na cijeloj ploči.

Bezdimenzijski geometrijski parametar ploče

$$k = \frac{a}{b} \quad (1)$$

ovisi o omjeru dužina stranica ploče.

2.1 Ploče sa sustavom linija tečenja prema slici 1.a

U ovim pločama sustav linija tečenja ima oblik slova Y. Lomno tijelo ima oblik klina s jednom ravninom simetrije.

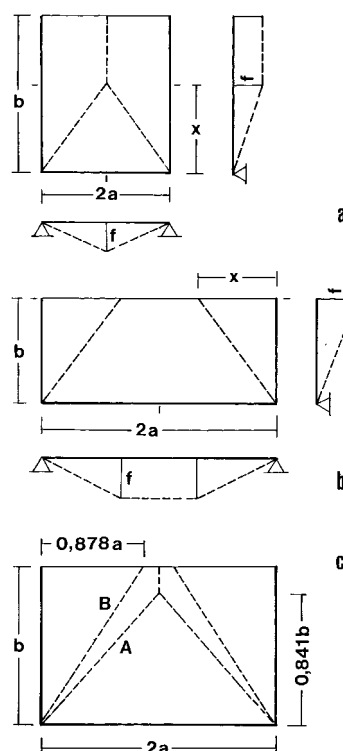
Neodređeni geometrijski parametar sustava linija tečenja jest dužina

$$x = tb, \quad (2)$$

gdje je t njezin bezdimenzijski koeficijent. Prema slici očito je da mora biti $x \leq b$ i time $t \leq 1$.

Rad unutarnjih sila, dakle plastičnih momenata duž linija tečenja pri deformaciji ploče jest:

$$U_i = 2mf \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{a} \right). \quad (3)$$



Slika 1. Ploča jednoliko opterećena po čitavoj površini sa prvim (a) i drugim (b) sustavom linija tečenja te (c) ploča s geometrijskim parametrom $k = 2a/b \approx 0,773$

Savojna čvrstoća ploče, m , odnosi se na jedinicu dužine presjeka ploče pa ima dimenziju sila \times dužina/dužina.

Rad opterećenja pri deformaciji ploče jednak je produktu njegova intenziteta q (veličine po jedinici površine) i volumena $af(3b-x)/3$ lomnog tijela, pa je:

$$U_a = q \frac{af}{3} (3b-x). \quad (4)$$

Uvrste li se navedeni izrazi za radove unutarnjih i vanjskih sila u jednadžbu virtualnog rada

$$U_i = U_a \quad (5)$$

dobije se izraz za savojnu čvrstoću presjeka ploče koji ovisi o intenzitetu opterećenja i još nepoznatom geometrijskom parametru x :

$$m = \frac{1}{6} \frac{3bx - x^2}{a^2 + bx} qa^2. \quad (6)$$

Izrazi li se u jednadžbi (6) x s pomoću svog bezdimenzijskog koeficijenta t , ona prima konačni oblik

$$m = k_M qa^2, \quad (7)$$

gdje je

$$k_M = \frac{t}{6} \frac{3-t}{k^2+t} \quad (8)$$

bezdimenzijski koeficijent savojne čvrstoće ploče ovisan o t .

Približno rješenje zadatka može se dobiti tako da se pretpostavi da su linije tečenja koje izlaze iz uglova ploče bisektrise odnosnih kutova, dakle sa stranicama ploče čine kut 45° . Onda je $x = a$ i time

$$t = k \quad (9)$$

pa jednadžba (8) poprima jednostavniji oblik

$$k_M = \frac{1}{6} \frac{3-k}{1+k} \quad (10)$$

Navedeno približno rješenje očito vrijedi ako je $b \geq a$ i time $k \leq 1$. Za posebni slučaj $b = a$, dakle $k = 1$, jest

$$k_M = \frac{1}{6} \quad (11)$$

Želi li se točnije rješenje za k_M i time savojnu čvrstoću m ploče, mora se odrediti vrijednost koeficijenta t koja k_M čini maksimalnim. Uvjetna je jednadžba

$$\frac{dk_M}{dt} = 0, \quad (12)$$

derivacija izraza za k_M na desnoj strani jednadžbe (8) po koeficijentu t mora dakle biti jednaka nuli, odnosno konkretno

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3t-t^2}{k^2+t} \right) = 0. \quad (13)$$

Kako treba derivirati kvocijent funkcija valja primijeniti pravilo diferencijalnog računa

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (14)$$

gdje crtice označuju deriviranje po argumentu funkcija u i v u brojniku odnosno nazivniku.

Jednadžba (13) nakon provedbe deriviranja i uređivanja postaje kvadratnom jednadžbom koeficijenta t

$$t^2 + 2k^2t - 3k^2 = 0 \quad (15)$$

a njezino je pozitivno rješenje

$$t = k(\sqrt{3+k^2} - k). \quad (16)$$

Time je oblik sustava linija tečenja ploče jednoznačno određen.

Uvrsti li se u općoj jednadžbi (8) za t izraz prema jednadžbi (16), ona nakon transformacija dobija konačni oblik

$$k_M = \frac{3}{2(\sqrt{3+k^2} + k)^2} \quad (17)$$

2.2 Ploča sa sustavom linija tečenja prema slici 1.b

Prikazani sustav linija tečenja odnosi se na ploče s relativno velikim parametrom k . Stvaraju se samo dvije linije tečenja, a lomno tijelo opet ima oblik klina, ali drugačijeg nego na slici 1.a.

Neodređeni geometrijski parametar sustava linija tečenja jest dužina

$$x = ta, \quad (18)$$

gdje je t njezin bezdimenzijski koeficijent. Na osnovi slike jasno je da mora biti $x \leq a$ i time $t \leq 1$.

Rad unutarnjih sila, dakle plastičnih momenata duž linija tečenja pri deformaciji ploče jest

$$U_i = 2mf \left(\frac{b}{x} + \frac{x}{b} \right). \quad (19)$$

Volumen je lomnog tijela $fb(3a-x)/3$ pa je rad opterećenja pri deformaciji ploče

$$U_a = q \frac{bf}{3} (3a-x). \quad (20)$$

Jednadžba (5) virtualnog rada daje savojnu čvrstoću ploče u ovisnosti o opterećenju i još nepoznatom parametru x sustava linija tečenja

$$m = \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} \frac{3ax - x^2}{b^2 + x^2} qa^2. \quad (21)$$

Izrazi li se u jednadžbi (21) x s pomoću koeficijenta t , ona opet prima konačni oblik (7) s time da je bezdimenzijski koeficijent savojne čvrstoće ploče sada

$$k_M = \frac{1}{6} \frac{3t-t^2}{1+k^2t^2}. \quad (22)$$

Približno rješenje zadatka može se dobiti tako da se pretpostavi da su linije tečenja bisektrise uglova koje međusobno čine oslonjene stranice ploče, dakle da one s rubovima ploče zatvaraju kut 45° . Onda je $x = b$ i time

$$t = \frac{1}{k} \quad (23)$$

pa je

$$k_M = \frac{1}{12k} \left(3 - \frac{1}{k} \right). \quad (24)$$

Navedeno približno rješenje očito vrijedi ako je $b \leq a$ i time $k \geq 1$. Za poseban slučaj $b = a$, dakle $k = 1$ opet je

$$k_M = \frac{1}{6} \quad (25)$$

kao u ploče sa sustavom linija tečenja u obliku slova Y.

Želi li se točnije rješenje za k_M , a time i m , treba odrediti vrijednost koeficijenta t koji k_M čini maksimalnim. Analogno kao u točki 2.1 sada se dobiva uvjetna jednadžba

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3t-t^2}{1+k^2t^2} \right) = 0, \quad (26)$$

a ona, nakon provedbe deriviranja i uređivanja, postaje kvadratnom jednadžbom koeficijenta t

$$3k^2t^2 + 2t - 3 = 0. \quad (27)$$

Njezino je pozitivno rješenje

$$t = \frac{1}{3k^2} (\sqrt{1+9k^2} - 1). \quad (28)$$

Time je oblik sustava linija tečenja ploče jednoznačno određen.

Uvrsti li se u jednadžbu (22) koeficijenta savojne čvrstoće ploče izraz prema jednadžbi (28), ona nakon transformacija dobiva konačni oblik

$$k_M = \frac{3}{4(\sqrt{1+9k^2} + 1)}. \quad (29)$$

2.3 Praktični proračun

Kako bismo primjenom jednadžbe (7) mogli odrediti potrebnu savojnu čvrstoću m ploče izložene jednoliko podijeljenom opterećenju intenziteta q na cijeloj ploči, treba utvrditi područja primjenjivosti obrazaca (17) i (29). U oba slučaja k_M ovisi samo o parametru k ploče, dakle omjeru dužina polustranica a i stranica b .

Brojčana analiza obrazaca (17) i (29) pokazuje da oni za $k \approx 0,733$ daju isti rezultat. Za $k \leq 0,733$ mjerodavnu, tj. veću k_M -vrijednost daje sustav linija tečenja na slici 1.a i time obrazac (17), a za $k \geq 0,733$ mjerodavan je sustav linija tečenja na slici 1.b i time obrazac (29). Tablica 1. pruža uvid u njegov tok i olakšava praktični proračun. Obrascima (2) i (16) za $k \leq 0,733$ te obrascima (18) i (28) za $k \geq 0,733$ može se, ako je to potrebno, ustanoviti odgovarajući oblik sustava linija tečenja. Za $k \approx 0,733$ moguća su oba sustava linija tečenja, A i B , na slici 1.c.

Primjeri

Za $k = a/b = 0,4$ (slika 1.a) je prema jednadžbi (7) i tablici 1. ili jednadžbi (17) $m = 0,316 qa^2$, a prema jednadžbi (2) i (16) $x = 0,551b$. Uspoređivanje s približnim rješenjem: Na osnovi jednadžbi (7) i (20) $m = 0,310 qa^2$. – Za $k = a/b = 1,1$ (slika 1.b) je prema jednadžbi (7) i tablici 1. ili jednadžbi (29) $m = 0,169 qa^2$, a prema jednadžbi (18) i (28) $x = 0,674 a$. Uspoređivanje s približnim rješenjem: Na osnovi jednadžbi (7) i (24) $m = 0,158 qa^2$.

Tablica 1. Brojčane vrijednosti koeficijenta k_M

k	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,733	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
k_M	0,397	0,354	0,316	0,283	0,253	0,227	0,220	0,208	0,193	0,180	0,169	0,158	0,149	0,141	0,134

Već prema zadatku koji treba riješiti proračun se može, umjesto kao što je pokazano, provesti i obratnim putem, naime tako da se polazeći od poznate savojne čvrstoće m ploče odredi intenzitet q njezina lomnog opterećenja. Na osnovi jednadžbe (7) je

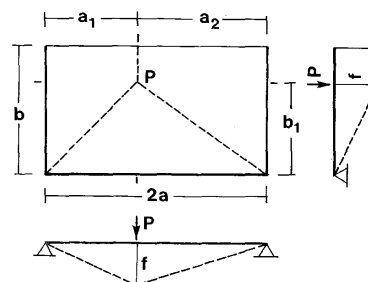
$$q = \frac{m}{a^2 k_M}. \quad (30)$$

Izvedeni obrasci za k_M , x i t naravno vrijede i kod ovog pristupa zadatku.

Dakako da pri iznalaženju potrebne savojne čvrstoće m ploče izložene jednoliko podijeljenom opterećenju q i pri iznalaženju intenziteta q lomnog opterećenja ploče zadane savojne čvrstoće m , treba uvesti u račun odgovarajuće parcijalne koeficijente sigurnosti ili globalni koeficijent sigurnosti.

3 Utjecaj koncentrirane sile

Na slici 2. prikazana je ploča izložena koncentriranoj sili P i odgovarajući sustav linija tečenja.



Slika 2. Ploča opterećena koncentriranom silom sa sustavom linija tečenja

Rad unutarnjih sila, dakle plastičnih momenata duž linije tečenja pri deformaciji ploče, jest:

$$U_i = mf \left[\frac{b_1}{a_1} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_2} + \frac{a_2}{b_1} + (b-b_1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right]. \quad (31)$$

Uzevši u obzir da je

$$a_1 + a_2 = 2a, \quad (32)$$

jednadžba (31) dobiva konačni oblik

$$U_i = mf \left[\frac{2a}{b_1} + b \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right]. \quad (33)$$

Rad opterećenja dan je produktom sile P i njezina pomaka

$$U_a = Pf. \quad (34)$$

Jednadžba (5) principa virtualnog rada, pošto se za radove unutarnjih sila i opterećenja uvrste navedeni izrazi, daje savojnu čvrstoću m ploče u ovisnosti o sili P ,

$$m = \frac{P}{\frac{2a}{b_1} + b\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}. \quad (35)$$

4 Istovremeni utjecaj jednoliko podijeljenog opterećenja i nekoliko koncentriranih sila

Ako je ploča izložena simultanom djelovanju jednoliko podijeljenog opterećenja intenziteta q na cijeloj ploči i

proizvoljnog broja koncentriranih sila P_j , potrebna savojna čvrstoća ploče može se odrediti primjenom rezultata za pojedinačna opterećenja (jednadžbe (7), (17), (29) i (34)). Zakon superpozicije utjecaja više opterećenja u teoriji plastičnosti ne vrijedi egzaktno, ali daje rezultate prihvatljive točnosti na sigurnoj strani, dakle vrijednosti potrebne savojne čvrstoće ploče veće od egzaktno vrijednosti ili jednake egzaktnoj vrijednosti. Označi li se redni broj opterećenja sa j , potrebna savojna čvrstoća ploče izložena samo opterećenju j sa m_j , a ukupni broj opterećenja sa n , potrebna je savojna čvrstoća ploče izložena svim opterećenjima

$$m = \sum_{j=1}^n m_j. \quad (36)$$

LITERATURA

- [1] Litzner, H.-U.: *Grundlagen der Bemessung nach Eurocode 2 – Vergleich mit DIN 1045 und DIN 4227*. Beton-Kalender 1995., Ernst & Sohn, Berlin, 1995.
- [2] Courbon, J.: *Resistance der materiaux*. Dunod, Paris, 1971.
- [3] Comite Europeen du beton: *Annexes aux Recommendations internationales pour le calcul et l'execution des ouvrages en beton*. AITEC, Roma, 1972.
- [4] Thürlimann, B. et al.: *Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton*. ETH, Zürich, 1983.
- [5] Rosman, R.: *Beitrag zur plastostatischen Berechnung zweiachsig gespannter Platten*, Bauingenieur 60 (1985.), 151-159.
- [6] Rosman, R.: *Beitrag zur plastostatischen Berechnung von Decktragwerken aus auf Balken gelagerten zweiachsig gespannten Platten*. Rad JAZU, knjiga 432, Zagreb, 1987.
- [7] Rosman, R.: *Stropne konstrukcije*, DGKH, Zagreb, 1990.